UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2014

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

As informações fornecidas pelo garçom nos permite escrever o sistema de equações:

$$\begin{cases} a+b+c=53{,}2 \\ 2a+3b=c+56 \\ 3a+2b=c+63 \end{cases} \text{ ou seja, } \begin{cases} a+b+c=53{,}2 \\ 2a+3b-c=56 \\ 3a+2b-c=63 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos $a=19{,}6$ e $b=12{,}6$ e $c=21$.

Segue que, $50-a=50-19{,}6=30{,}4$, $50-b=50-12{,}6=37{,}4$ e $50-c=50-21=29$.

Assim, o troco da Angélica é R$ 30,40, da Beatriz é R$ 37,40 e da Clarissa é R$ 29,00.

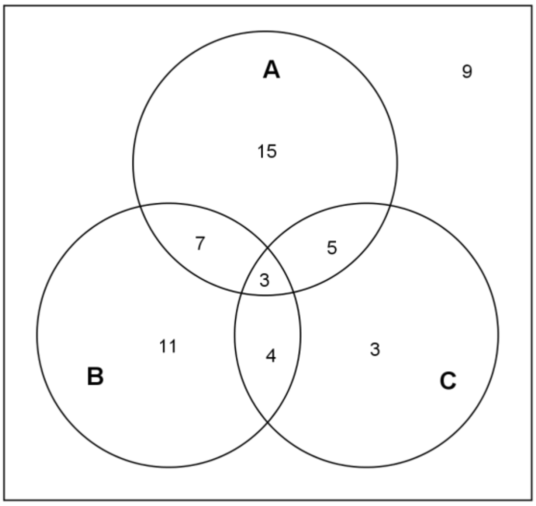
2ª QUESTÃO

A) Sejam A o conjunto das pessoas do grupo que gostam de arroz-doce, B o conjunto das pessoas do grupo que gostam de brigadeiro e C o conjunto das pessoas do grupo que gostam de cocada. Indicando por $|X|$ o número de elementos de um conjunto finito X, tem-se
$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=30+25+15-10-8-7+3=48$

B) Como toda pessoa do grupo ou gosta de um dos três doces ou não gosta de nenhum deles, então o número de pessoas do grupo que não gostam de nenhum dos três doces é $57-48=9$.

C) O conjunto das pessoas que gostam de arroz-doce, mas não gostam nem de brigadeiro e nem de cocada, é $A-(B\cup C)$.
Tem-se $A=(A-(B\cup C))\cup(A\cap B)\cup(A\cap C)$, sendo $(A-(B\cup C))\cap(A\cap B)=(A-(B\cup C))\cap(A\cap C)=\phi$ e $(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap B\cap C$. Logo,
$|A|=|(A-(B\cup C))\cup(A\cap B)\cup(A\cap C)|=|A-(B\cup C)|+|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$, ou seja,
$30=|A-(B\cup C)|+10+8-3$ e, portanto, $|A-(B\cup C)|=15$.

Solução alternativa:



A) 48

B) 9

C) 15

3ª QUESTÃO

A) Sejam $\overline{AB} = x$ e $\overline{AD} = y$. O perímetro do retângulo $ABCD$ é $2x + 2y$ e o comprimento da semicircunferência S, que tem raio $\frac{x}{2}$, é $\pi\frac{x}{2}$. Sabemos que $2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 12$. Logo $y = 6 - x - \frac{\pi}{4}x$. A área de R é a soma $A = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Substituindo a expressão de y obtemos $A = x\left[6 - \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)x\right]$.

B) Pelo item A, a área de R em função de x é $f(x) = x\left[6 - \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)x\right]$, que é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Suas raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{6}{1 + (\pi/8)} = \frac{48}{8 + \pi}$. O x que dá a área máxima é o x do vértice x_V, que é o ponto médio das raízes, $x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{24}{8 + \pi}$.

C) Seja $\theta = E\hat{O}F$. Queremos que

Área da região azul = $\frac{25}{100}$ (Área da região vermelha) = $\frac{1}{4}$ (Área da região vermelha).

A área de um setor circular é proporcional ao seu ângulo, logo devemos ter

$$\theta = \frac{1}{4}(\pi - \theta) \;\Rightarrow\; 4\theta = \pi - \theta \;\Rightarrow\; 5\theta = \pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{5} \text{ rad.}$$

4ª QUESTÃO

A) Sejam c_n e l_n o comprimento e a largura de R_n, respectivamente. Como $c_1 = \ell_0$, $\ell_1 = c_0/2$ e $c_0/\ell_0 = c_1/\ell_1$, então $c_0 = \ell_0\sqrt{2}$. Como a área de R_0 é $4\sqrt{2}$ m^2, então $c_0 \cdot \ell_0 = 4\sqrt{2}$. Como $c_0 = \ell_0\sqrt{2}$ e $c_0 \cdot \ell_0 = 4\sqrt{2}$, então $\ell_0 = 2$ m.

B) Como $c_1 = \ell_0$ e $c_0 = \ell_0\sqrt{2}$, então $c_1 = c_0/\sqrt{2}$. Como $c_1 = c_0/\sqrt{2}$ e $\ell_1 = c_0/2$, então $c_1 = \ell_1\sqrt{2}$. Como essas relações valem em todas as etapas sucessivas do procedimento, então $c_n = \ell_n\sqrt{2}$, para todo *n*. Como as áreas de R_1 e R_2 são $c_1 \cdot \ell_1 = 4\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$ m^2 e $c_2 \cdot \ell_2 = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}$ m^2, respectivamente, e $c_1 = \ell_1\sqrt{2}$ e $c_2 = \ell_2\sqrt{2}$, então $\ell_1 = \sqrt{2}$ m e $\ell_2 = 1$ m.

C) Como a área de R_n é $c_n \cdot \ell_n = 4\sqrt{2}/2^n = 2^{2-n} \cdot \sqrt{2}$ e $c_n = \ell_n\sqrt{2}$, então $\ell_n = 2^{1-n/2}$ m.

D) Como $125/128 = 1000/1024$ mm equivale a $1/1024 = 2^{-10}$ m, então $\ell_n = 2^{1-n/2} = 2^{-10}$ se, e somente se, $1 - n/2 = -10$ se, e somente se, $n = 22$.

5ª QUESTÃO

A) A equação da reta r é $y=\frac{1}{a}+m(x-a)$. Fazendo $x=0$ obtemos $y=\frac{1}{a}-ma$. Fazendo $y=0$ obtemos $x=a-\frac{1}{ma}$. Assim os pontos de interseção de r com os eixos coordenados são $\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{1}{a}-ma\right)$ e $\mathrm{R}\left(a-\frac{1}{ma},\ 0\right)$.

A área do triângulo retângulo QOR formado por r e pelos eixos coordenados é

Área = $\frac{1}{2}$ base . altura = $\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{ma}\right)\left(\frac{1}{a}-ma\right)$.

B) Para obter a abscissa x dos pontos de interseção de r com o gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$ igualamos $\frac{1}{a}+m(x-a)=\frac{1}{x}$. Daí

obtemos $m(x-a)=\frac{a-x}{a\,x} \Rightarrow m\,a\,x\,(x-a)=-(x-a) \Rightarrow (x-a)\,(m\,a\,x+1)=0 \Rightarrow x=a$ ou $x=-\frac{1}{ma}$.

Queremos que $P\left(a,\ 1/a\right)$ seja o único ponto de interseção, logo devemos ter $-\frac{1}{ma}=a$, ou seja, $m=-\frac{1}{a^2}$.

C) Substituindo $m=-\frac{1}{a^2}$ obtido no item B na expressão da área obtida no item A, vemos que, para esse valor de m, a área do triângulo formado por r e pelos eixos coordenados é 2 e, portanto, não depende de a.