UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2016

A banca elaboradora espera obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

Seja M o valor do automóvel sem o imposto e seja I o imposto.

A) Na sistemática antiga de cálculo do imposto, $I = 0{,}20M$, de modo que M=5I. O valor desembolsado pelo comprador será de $M + I = 5I + I = 60.000$, de modo que o imposto $I = 10.000$ marrecos.

B) Na nova sistemática, $I = 0{,}20(M + I) = 0{,}20 \times 60.000$. Nesse caso, $I = 12.000$ marrecos.

C) Do item A) sabemos que o valor do carro sem o imposto é $M = 50.000$ marrecos. Como $I = 0{,}20 \times (M + I) = 0{,}20 \times (50.000 + I)$, temos $5I = 50.000 + I$, de modo que $I = 12.500$ marrecos. Logo, esse carro custa para o consumidor, hoje, $M + I = 50.000 + 12.500$, ou seja, custa 62.500 marrecos.

2ª QUESTÃO

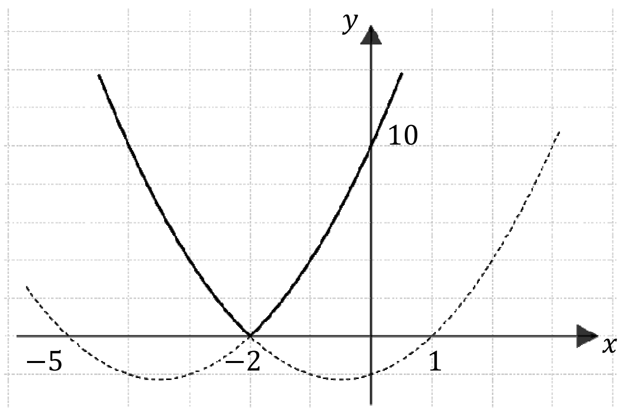
Observamos que $g(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2; \\ -x - 2, & x \leq -2. \end{cases}$

A) Assim, para $x \geq -2$, devemos ter $x^2 + 3x = x + 2$, ou seja, $x = -1 \pm \sqrt{3}$; neste caso, $x = -1 + \sqrt{3}$ é a única raiz no intervalo $x \geq -2$. Para $x \leq -2$, $x^2 + 3x = -x - 2$, ou seja, $x = -2 \pm \sqrt{2}$, e, neste caso, $x = -2 - \sqrt{2}$ é a única raiz no intervalo $x \leq -2$. O conjunto solução da equação $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é, pois, $S = \{-1 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{2}\}$.

B) Como $f(g(x)) = |x + 2|^2 + 3|x + 2|$,

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10, & x \geq -2; \\ x^2 + x - 2, & x \leq -2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x + 5)(x + 2), & x \geq -2; \\ (x + 2)(x - 1), & x \leq -2. \end{cases}$$

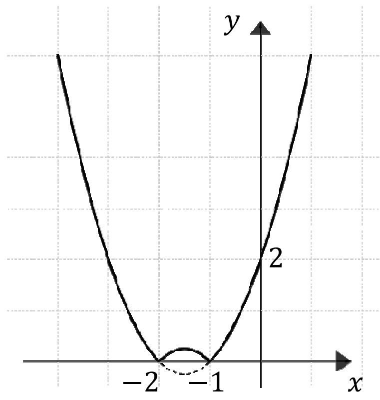


O gráfico de $f \circ g$ é formado pelos dois arcos de parábola, em linha sólida, mostrados na figura acima.

Agora, $g(f(x)) = |x^2 + 3x + 2|$

$= |(x + 2)(x + 1)|$.

O gráfico de $g \circ f$ é formado pelos três arcos de parábola, em linha sólida, mostrados na figura ao lado, sendo o arco com concavidade para baixo o refletido em torno do eixo y do arco tracejado.



C) Ora, sendo

$$h(x) = 2x + |x + 2| = \begin{cases} 3x + 2, & x \geq -2; \\ x - 2, & x \leq -2, \end{cases}$$

vemos que h é claramente crescente em cada um dos trechos, $x \leq -2$ e $x \geq -2$. Logo, h é injetora e, portanto, invertível. Como h é crescente e $h(-2) = -4$, então $x \geq -2$ se, e somente se, $y \geq -4$. Assim, para $y \geq -4$, $y = 3x + 2$ e $x=(y-2)/3$; para $y \leq -4$, $y = x - 2$, e $x = y + 2$.

Podemos, então, escrever $x = h^{-1}(y) = \begin{cases} (y-2)/3, & y \geq -4; \\ y + 2, & y \leq -4. \end{cases}$

3ª QUESTÃO

A) A área S de $ABCD$ é dada por $S = (2r\,\mathrm{sen}(\theta/2))(2r\cos(\theta/2)) = 4r^2\,\mathrm{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

B) Como $\mathrm{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) = (\mathrm{sen}\,\theta)/2$, então $S = 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta$, que assume valor máximo igual a $2r^2$, quando $\theta = \pi/2$ radianos, e $ABCD$ é um quadrado.

C) O perímetro p de $ABCD$ é dado por

$$p = 2\cdot(2r\,\mathrm{sen}(\theta/2)) + 2\cdot(2r\cos(\theta/2)) = 4r(\mathrm{sen}(\theta/2) + \cos(\theta/2)).$$

D) Tem-se

$$\mathrm{sen}(\theta/2) + \cos(\theta/2) = \mathrm{sen}(\theta/2) + \mathrm{sen}(\pi/2 - \theta/2)$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(\pi/4)\cos(\theta/2 - \pi/4) = 2(\sqrt{2}/2)\cos(\theta/2 - \pi/4)$$

$$= \sqrt{2}\cos(\theta/2 - \pi/4).$$

Assim, $p = 4\sqrt{2}r\cos(\theta/2 - \pi/4)$, que assume valor máximo igual a $4\sqrt{2}r$ quando $\theta = \pi/2$ radianos.

4ª QUESTÃO

A) A quantidade de números assim formados é a permutação dos 6 algarismos, a saber, $6! = 720$.

B) Para determinar a posição ocupada pelo número 837159, precisamos contar quantos números estão antes dele. Ora, antes dele constam os números que começam por

   a. 1, 3, 5 e 7, a saber, $4 \cdot 5! = 4 \cdot 120 = 480$;

   b. 81, a saber, $4! = 24$;

   c. 831, a saber, $3! = 6$;

   d. 835, a saber, $3! = 6$.

   Isso totaliza $480 + 24 + 6 + 6 = 516$. Então, a posição ocupada pelo número 837159 é a 517ª posição.

C) Os primeiros números da lista começam por 1, que totalizam $5! = 120$. A seguir, temos os números que começam por 3, que também totalizam $5! = 120$. Então o número que ocupa a 200ª posição começa por 3. Destes, os primeiros, que começam por 31, 35 e 37, totalizam $3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$. Assim, o número que ocupa a 192ª posição é 379851, e o número procurado começa por 38. Há $3! = 6$ destes que começam por 381. O número 381975 ocupa a 198ª posição. Os dois próximos números são 385179 e 385197. Este último ocupa a 200ª posição.

5ª QUESTÃO

A) A equação de uma reta tangente à parábola passando pelo ponto $(0, 10)$ é $y = mx + 10$. Como a reta tangente deve intersectar a parábola em um único ponto, o sistema de equações formado pelas equações da parábola e da reta deve ter uma única solução. Dessas duas equações do sistema, deduz-se que $mx + 10 = (x - 5)^2 + 1$, isto é, $x^2 - (m + 10)x + 16 = 0$. Como o sistema deve ter uma única solução, o discriminante da equação quadrática $x^2 - (m + 10)x + 16 = 0$ deve ser igual a zero, ou seja, $\left(-(m + 10)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$, isto é, $m^2 + 20m + 36 = 0$, e, portanto, $m = -2$ ou $m = -18$. Assim, existem duas retas tangentes à parábola passando pelo ponto $(0, 10)$, a saber, $y = -2x + 10$ e $y = -18x + 10$.

B) Para achar o ponto em que a reta $y = -2x + 10$ tangencia a parábola, resolvemos o sistema formado pelas equações $y = -2x + 10$ e $x^2 - (m + 10)x + 16 = 0$, com $m = -2$. Obtemos $x = 4$ e $y = 2$, e encontramos o ponto $(4, 2)$. Analogamente, o ponto em que a reta $y = -18x + 10$ tangencia a parábola é o ponto $(-4, 82)$.

C) A parábola dada $y = 1 + (x - 5)^2$, ou $(x - 5)^2 = y - 1$, com vértice no ponto $(5,1)$, resulta da translação da parábola $x^2 = y$, com vértice na origem, de 5 unidades para a direita e 1 unidade para cima. Como a equação $x^2 = y$ está na forma reduzida $x^2 = 2py$, onde p é a distância do foco à diretriz, $p = 1/2$. Segue, então, que a diretriz da parábola dada tem equação $y = 1 - p/2$, ou seja, $y = 3/4$. Como os pontos $(4, 2)$ e $(-4, 82)$ estão na parábola, suas distâncias ao foco são iguais às suas respectivas distâncias à diretriz. Assim, a distância de $(4, 2)$ ao foco é igual a $|2 - 3/4| = 5/4$ e a distância de $(-4, 82)$ ao foco é igual a $|82 - 3/4| = 325/4$.